

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ
практичних занять з вищої математики за темою
«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»**

для студентів усіх спеціальностей
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Харків 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ
практичних занять з вищої математики за темою
«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»**

для студентів усіх спеціальностей
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Затверджено
редакційною-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 04.06.14

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

Методичні вказівки до проведення практичних занять за темою «Невизначений інтеграл» для студентів усіх спеціальностей факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ / уклад. Т.Т. Черногор. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – 25 с.

Укладач Т. Т. Черногор

Рецензент О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Кафедра вищої математики

Вступ

Методичні вказівки розроблені як продовження серії «Практичні заняття з вищої математики» та призначені для молодих викладачів та студентів, у тому числі тих, що навчаються за особистим навчальним планом. Методичні вказівки до проведення практичних занять з теми «Невизначений інтеграл» складаються з 7 практичних занять та охоплюють навчальну програму з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ.

Кожне практичне заняття починається з контрольних запитань, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. Далі, згідно з даною темою, наведені задачі, до яких додаються відповіді.

Після кожного практичного заняття подано список літератури, яка рекомендована до самостійного ознайомлення. До цього списку увійшли як традиційні класичні підручники, так і навчально-методичні видання кафедри. Завершуються методичні вказівки варіантами контрольних робіт.

Практичне заняття 1

ТАБЛИЧНІ ІНТЕГРАЛИ. ІНВАРІАНТНІСТЬ ФОРМУЛ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Поняття первісної, означення невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Табличні інтеграли.
4. Теорема про інваріантність формул інтегрування.
5. Теорема про заміну змінної у невизначеному інтегралі.

Задачі:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{3x^4 - 7x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx;$ | 13. $\int \frac{\cos x}{4\sin^2 x - 49} dx;$ |
| 2. $\int \frac{(2-x)^2}{x^2\sqrt{x}} dx;$ | 14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - \ln^2 x}};$ |
| 3. $\int \frac{4 \cdot 3^x - 3 \cdot 4^x}{3^x} dx;$ | 15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{25 \operatorname{tg}^2 x + 7}};$ |
| 4. $\int \frac{3 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx;$ | 16. $\int e^{4x+1} dx;$ |
| 5. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx;$ | 17. $\int x \cdot e^{5x^2-9} dx;$ |
| 6. $\int \frac{dx}{x^2 - 4};$ | 18. $\int \frac{9^{\arctg 4x}}{1 + 16x^2} dx;$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}};$ | 19. $\int \sin 3x \cdot e^{2\cos 3x-5} dx;$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}};$ | 20. $\int \cos 3x dx;$ |
| 9. $\int (5x + 2)^4 dx;$ | 21. $\int \sin(5 - 4x) dx;$ |
| 10. $\int x(4x^2 + 1)^3 dx;$ | 22. $\int e^x \cdot \cos(3e^x + 5) dx;$ |
| 11. $\int \frac{\sqrt[9]{\ln^4(2x+7)}}{2x+7} dx;$ | 23. $\int x^2 \cdot \sin(4 - 3x^3) dx;$ |
| 12. $\int \frac{dx}{9x^2 + 16};$ | 24. $\int \frac{\cos 1/x}{x^2} dx;$ |

$$25. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$26. \int \frac{dx}{\cos^2 8x};$$

$$27. \int \frac{dx}{x \cdot \cos^2 \ln x};$$

$$28. \int \frac{dx}{\sin^2 5x};$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}};$$

$$30. \int \frac{e^{3x}}{\cos^2 e^{3x}} dx;$$

$$31. \int \frac{2 + 3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$$

$$32. \int \frac{4 \operatorname{arctg} 7x - 8x}{1 + 49x^2} dx;$$

$$33. \int \frac{7\sqrt{\ln^3 x} + 5}{x} dx;$$

$$34. \int \frac{5x + \sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Відповіді:

$$1. x^3 - 7 \ln|x| - \frac{10}{\sqrt{x}} + C; \quad 2. -\frac{8}{3}x^{-3/2} + 8x^{-1/2} + 2x^{1/2} + C; \quad 3. 4x - \frac{3(4/3)^x}{\ln 4/3} + C;$$

$$4. \frac{3}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x + C; \quad 5. -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C; \quad 6. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C; \quad 7. \arcsin \frac{x}{3} + C;$$

$$8. \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C; \quad 9. \frac{(5x+2)^5}{25} + C; \quad 10. \frac{(4x^2 + 1)^4}{32} + C;$$

$$11. \frac{9}{26} [\ln(2x+7)]^{13/9} + C; \quad 12. \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3x}{4} + C; \quad 13. \frac{1}{28} \ln \left| \frac{2 \sin x - 7}{2 \sin x + 7} \right| + C;$$

$$14. \arcsin \frac{\ln x}{5} + C; \quad 15. \frac{1}{5} \ln |5 \operatorname{tg} x + \sqrt{25 \operatorname{tg}^2 x + 7}| + C; \quad 16. \frac{1}{4} e^{4x+1} + C;$$

$$17. \frac{1}{10} e^{5x^2-9} + C; \quad 18. \frac{1}{4 \ln 9} 9^{\operatorname{arctg} 4x} + C; \quad 19. -\frac{1}{6} e^{2 \cos 3x-5} + C; \quad 20. \frac{1}{3} \sin 3x + C;$$

$$21. \frac{1}{4} \cos(5-4x) + C; \quad 22. \frac{1}{3} \sin(3e^x + 5) + C; \quad 23. \frac{1}{9} \cos(4-3x^3) + C;$$

$$24. -\sin \frac{1}{x} + C; \quad 25. -2 \cos \sqrt{x} + C; \quad 26. \frac{1}{8} \operatorname{tg} 8x + C; \quad 27. \operatorname{tg}(\ln x) + C;$$

$$28. -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C; \quad 29. -2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C; \quad 30. \frac{1}{3} \operatorname{tg}(e^{3x}) + C; \quad 31. 2 \operatorname{tg} x + \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\ln 3} + C;$$

$$32. \frac{2 \operatorname{arctg}^2 7x}{7} - \frac{4}{49} \ln|1 + 49x^2| + C ; 33. \frac{14}{5} (\ln x)^{5/2} + 5 \ln x + C ; 34. -5\sqrt{1-x^2} + \frac{3(\arcsin x)^{4/3}}{4} + C .$$

Задачі для самостійної роботи:

$$1. \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 8}} dx ;$$

$$2. \int \frac{4 \operatorname{arctg} 9x - x}{1 + 81x^2} dx ;$$

$$3. \int \frac{x^2}{9 - x^6} dx ;$$

$$4. \int \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 - 9}} dx ;$$

$$5. \int \frac{2x - 1}{\sqrt{25 - x^2}} dx ;$$

$$6. \int \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^4} dx ;$$

$$7. \int x \sin(2 - 3x^2) dx ;$$

$$8. \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx ;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x - 1)^4}} ;$$

$$10. \int x^3 \cdot e^{4-5x^4} dx ;$$

$$11. \int \frac{dx}{x(9 \ln^2 x - 1)} ;$$

$$12. \int \frac{3^x}{25 + 9^x} dx ;$$

$$13. \int \frac{18x - 7 \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx ;$$

$$14. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx ;$$

$$15. \int \frac{\ln x - 5}{x\sqrt{\ln x}} dx ;$$

$$16. \int \frac{(\arcsin x)^3 - 5}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

Відповіді:

$$1. \frac{3}{8} (x^4 + 8)^{2/3} + C ; 2. \frac{2}{9} (\operatorname{arctg} 9x)^2 - \frac{1}{162} \ln|1 + 81x^2| + C ; 3. -\frac{1}{18} \ln \left| \frac{x^3 - 3}{x^3 + 3} \right| + C ;$$

$$4. 3\sqrt{x^2 - 9} + 4 \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C ; 5. -2\sqrt{25 - x^2} - \arcsin \frac{x}{5} + C ; 6. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 -$$

$$-\frac{1}{4} \ln|1 + x^4| + C ; 7. \frac{1}{6} \cos(2 - 3x^2) + C ; 8. x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C ;$$

$$9. -\frac{1}{\sqrt[3]{3x - 1}} + C ; 10. -\frac{1}{20} e^{4-5x^4} + C ; 11. \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 \ln x - 1}{3 \ln x + 1} \right| + C ; 12. \frac{1}{5 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{5} + C ;$$

$$13. \frac{9}{4} \ln|1+4x^4| - \frac{7}{4} (\operatorname{arctg} 2x)^2 + C ;$$

$$14. \sin(\ln x) + C ;$$

$$15. \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2} - 10\sqrt{\ln x} + C ; 16. \frac{(\arcsin x)^4}{4} - 5 \arcsin x + C .$$

Література:

[2], гл. 5, §1, С. 253–264;

[3], гл.4, С. 173–176;

[4], гл. 5, §1–4, С. 218–223;

[5], гл.10, §1–5, С. 335–344;

[6], гл.7, §1–2, С. 289–299.

Практичне заняття 2

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

1. Формула інтегрування частинами.
2. Інтегрування функцій $P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)a^{\alpha x}$, $P_n(x)\sin \alpha x$, $P_n(x)\cos \alpha x$.
3. Інтегрування функцій $e^{\alpha x} \cos \beta x$ та $e^{\alpha x} \sin \beta x$.
4. Інтегрування функцій, що містять \arcs – функцію або логарифмічну функцію, та при цьому не є табличними інтегралами.
5. Інтеграли виду $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$, $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$, $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$, $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$.

Задачі:

$$1. \int (2x+7)e^{5x} dx ;$$

$$6. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx ;$$

$$2. \int (3-4x)\sin 5x dx ;$$

$$7. \int e^x \sin x dx ;$$

$$3. \int (4x^2 - 3x)\cos 5x dx ;$$

$$8. \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$$

$$4. \int \operatorname{arctg} x dx ;$$

$$5. \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx ;$$

Відповіді:

1. $\frac{1}{5}(2x+7)e^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C$; 2. $\frac{4x-3}{5}\cos 5x - \frac{4}{25}\sin 5x + C$; 3. $\frac{1}{5}(4x^2 - 3x)\sin 5x +$
 $+\frac{1}{25}(8x-3)\cos 5x - \frac{8}{125}\sin 5x + C$; 4. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$; 5. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \ln x -$
 $-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$; 6. $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$; 7. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$;
 8. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$.

Задачі для самостійної роботи:

1. $\int x 3^{7x} dx$; 5. $\int x \operatorname{arctg} 7x dx$;
 2. $\int (3x+4)e^{-2x} dx$; 6. $\int x \ln(x^2+5) dx$;
 3. $\int (5x+2)\sin \frac{x}{3} dx$; 7. $\int \frac{x}{\cos^2 2x} dx$;
 4. $\int x^2 e^{7x-1} dx$; 8. $\int \sin(\ln x) dx$.

Відповіді:

1. $\frac{x \cdot 3^{7x}}{7 \ln 3} - \frac{1}{49 \cdot \ln^2 3} \cdot 3^{7x} + C$; 2. $-\frac{3x-4}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{3}{4} \cdot e^{-2x} + C$; 3. $-3(5x+2)\cos \frac{x}{3} +$
 $+45\sin \frac{x}{3} + C$; 4. $\frac{1}{7}x^2 e^{7x-1} - \frac{2}{49}x e^{7x-1} + \frac{2}{343}e^{7x-1} + C$; 5. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 7x - \frac{7}{98}x +$
 $+\frac{1}{98} \operatorname{arctg} 7x + C$; 6. $\frac{x^2}{2} \ln|x^2+5| - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \ln|x^2+5| + C$; 7. $\frac{x}{2} \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + C$;
 8. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

Література:

- [2], ГЛ. 5, §1, С. 264–270;
 [3], ГЛ.4, С. 176–178;
 [4], ГЛ. 5, §4, С. 224–227;
 [5], ГЛ.10, §6, С. 347–350;
 [6], ГЛ.7, §2, С. 299–302.

Практичне заняття 3

ІНТЕГРАЛИ ВІД ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

1. Формули $(a \pm b)^2$.
2. Порядок виділення повного квадрату.
3. Інтегрування виразів $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ та $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$.
4. Інтегрування виразів $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ та $\frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.
5. Інтегрування виразу $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Задачі:

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10};$
2. $\int \frac{3x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx;$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 11}};$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}};$
5. $\int \frac{2 - 5x}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx;$
6. $\int \sqrt{2 + x - x^2} dx;$
7. $\int \sqrt{5x^2 - 2x + 1} dx.$

Відповіді:

1. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C;$
2. $\frac{3}{4} \ln \left| x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| + \frac{17}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x-1/2} \right| + C;$
3. $\ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 11} \right| + C;$
4. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+1}{4} + C;$
5. $5\sqrt{5 - x^2 + 4x} - 8 \arcsin \frac{x-2}{3} + C;$
6. $\frac{2x-1}{4} \sqrt{2 + x - x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3} + C;$

$$7. \sqrt{5} \left[\frac{5x-1}{10} \sqrt{x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}} + \frac{2}{25} \ln \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}} \right| \right] + C.$$

Задачі для самостійної роботи:

$$1. \int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 5};$$

$$4. \int \frac{3x+1}{2x^2 + 5x + 2} dx;$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 4}};$$

$$5. \int \frac{7x-2}{\sqrt{9-4x-5x^2}} dx;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{7-16x-2x^2}};$$

$$6. \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Відповіді:

$$1. \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} + C;$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 4/3} \right| + C;$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}(x+4)}{\sqrt{39}} + C;$$

$$4. \frac{3}{4} \ln \left| x^2 + \frac{5}{2}x + 1 \right| - \frac{11}{12} \ln \left| \frac{2x+1}{2x+4} \right| + C;$$

$$5. -\frac{7}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{9}{5} - \frac{4}{5}x - x^2} - \frac{24}{5\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x+2}{7} + C;$$

$$6. \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2 \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C.$$

Література:

[3], гл.4, С. 178–181;

[4], гл. 5, §5, С. 227–229;

[5], гл.10, §5, С. 344–347.

Практичне заняття 4

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. НАЙПРОСТІШІ РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ ТА ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Поняття многочлена. Розкладання многочлена на прості множники.
2. Раціональні дроби, поняття правильного та неправильного дробу.
3. Найпростіші раціональні дроби.

4. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

5. Розкладання раціонального дробу на найпростіші:

—знаменник має дійсні різні корені;

—знаменник має дійсні корені, деякі — кратні;

—знаменник має комплексні корені.

Задачі:

1. Розкласти многочлен на множники:

а) $3x^2 + 7x - 10$; б) $x^3 + x - 2$; в) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$.

2. Записати неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного дробу:

а) $\frac{x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x}$; б) $\frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x^2 + 4)}$.

3. Записати правильний дріб у вигляді суми простих елементарних дробів:

а) $\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$; б) $\frac{10x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2}$; в) $\frac{x^2 + 28x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)}$.

4. Знайти:

а) $\int \frac{4x^2 + 11x - 8}{x^3 - 3x^2 - 4x} dx$; б) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Відповіді:

1. а) $(x-1)(3x+10)$; б) $(x-1)(x^2 + x + 2)$; в) $(x+1)^2(x+3)$. 2. а) $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 + \frac{162x + 4}{x^2 + 3x}$; б) $2x - \frac{13x^2 + 8x + 8}{x^3 + 4x}$. 3. а) $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3(x+2)}$;

б) $-\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{29}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$; в) $-\frac{6}{(x+2)^2} + \frac{7}{x^2 + 4}$. 4. а) $\ln \left| \frac{x^2(x-4)^5}{(x+1)^3} \right| + C$;

б) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C$.

Задачі для самостійної роботи:

1. Розкласти многочлен на множники:

а) $2x^2 + 7x + 6$; б) $3x^3 + x + 4$; в) $x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2. Записати неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного дробу:

а) $\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 + 5x^2}$; б) $\frac{x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x + 2)^2(x + 1)}$.

3. Записати правильний дріб у вигляді суми простих елементарних дробів:

а) $\frac{3x^2 - 29x - 24}{x(x - 3)(x + 4)}$; б) $\frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x - 2)^3}$; в) $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}$.

4. Знайти:

а) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$; б) $\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$.

Відповіді:

1. а) $(x + 2)(2x + 3)$; б) $(3x^2 - 3x + 4)(x + 1)$; в) $(x^2 + 1)(x - 2)$. 2. а) $x - 5 + \frac{27x^2 - 3}{x^3 + 5x^2}$; б) $1 + \frac{2x^2 - x - 5}{(x + 2)^2(x + 1)}$. 3. а) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x - 3} + \frac{5}{x + 4}$; б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{(x - 2)^3}$; в) $\frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$. 4. а) $x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x - 2| + \frac{28}{3} \ln|x - 3| + C$; б) $-\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C$.

Література:

[2], гл. 5, §1, С. 270–277;

[3], гл.4, С. 181–191;

[4], гл. 5, §6, С. 229–234;

[5], гл.10, §7–9, С. 350–359;

[6], гл.7, §3, С. 302–312.

Практичне заняття 5

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. РОЗКЛАД РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ НА НАЙПРОСТІШІ ДРОБИ

1. Найпростіші раціональні дроби.
2. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

3. Розкладання раціональної функції на найпростіші дробы:

- знаменник має дійсні різні корені;
- знаменник має дійсні корені, деякі – кратні;
- знаменник має комплексні корені.

Задачі:

1. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx;$

4. $\int \frac{dx}{x^3-1};$

2. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx;$

5. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx.$

3. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)};$

Відповіді:

1. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C;$

2. $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + 20\ln|x-3| - \frac{47}{4}\ln|x-2| + C;$

3. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C;$ 4. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$ 5. $\frac{(x+1)^2}{2} +$

$+\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \operatorname{arctg} x + C.$

Аудиторна самостійна робота

Варіант 1

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)} dx; \quad \int \frac{dx}{x^3-8}.$$

Варіант 2

$$\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x^2+4)}.$$

Варіант 3

$$\int \frac{2x^2-x+3}{x^3-2x^2+x} dx; \quad \int \frac{x^2+5}{x^3+9x} dx.$$

Варіант 4

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2} dx; \quad \int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Задачі для самостійної роботи:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx;$

2. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx;$

$$3. \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$$

$$5. \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^4 - 1};$$

Відповіді:

$$1. x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C ;$$

$$2. 5x + \ln \left| \frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}} \right| + C ;$$

$$3. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C ;$$

$$4. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C ;$$

$$5. -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1) + C .$$

Література:

[3], гл.4, С. 181–191;

[4], гл. 5, §6, С. 235–237;

[5], гл.10, §7–9, С. 350–359;

[6], гл.7, §3, С. 302–313.

Практичне заняття 6

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Універсальна тригонометрична підстановка.
2. Інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, парних відносно $\sin x$, $\cos x$:
 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.
3. Інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, непарних відносно $\cos x$:
 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
4. Інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$, парних відносно $\sin x$:
 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
5. Інтегрування виразів $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$, $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x$, $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x$.

Задачі:

$$1. \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x};$$

$$2. \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$$

$$3. \int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x};$$

$$4. \int \cos^2 6x dx;$$

$$5. \int \operatorname{tg}^5 x dx;$$

$$6. \int \sin^3 4x dx;$$

$$7. \int \frac{\sin^5 x}{1+\cos^2 x} dx;$$

$$8. \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx;$$

$$9. \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx;$$

$$10. \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

Відповіді:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)+C ; \quad 2. \frac{1}{2-\operatorname{tg} x / 2}+C ; \quad 3. \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x)+C ; \quad 4. \frac{1}{2} x + \\ & +\frac{1}{24} \sin 12 x+C ; \quad 5. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x-\ln |\cos x|+C ; \quad 6. -\frac{1}{4} \cos 4 x+\frac{1}{12} \cos ^3 4 x+C ; \\ 7. & -\frac{\cos ^3 x}{3}+3 \cos x-4 \operatorname{arctg}(\cos x)+C ; \quad 8. \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin ^5 x}-\frac{3}{11} \sqrt[3]{\sin ^{11} x}+C ; \quad 9. \frac{1}{4} \sin 2 x- \\ & -\frac{1}{16} \sin 8 x+C ; \quad 10. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)+C . \end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи:

$$1. \int \frac{dx}{5+4 \sin x} ;$$

$$2. \int \frac{dx}{1+\sin ^2 x} ;$$

$$3. \int \sin ^2 7 x dx ;$$

$$4. \int \cos ^3 2 x dx ;$$

$$5. \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^8 x} ;$$

$$6. \int \frac{\sin ^3 x}{\sqrt[3]{\cos ^4 x}} dx ;$$

$$7. \int \frac{\cos ^3 x}{\sin ^4 x} dx ;$$

$$8. \int \cos ^4 x dx ;$$

$$9. \int \sin 3 x \cdot \cos 7 x dx ;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin ^2 x-6 \sin x \cdot \cos x+15 \cos ^2 x} .$$

Відповіді:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2}+4}{3}+C ; \quad 2. -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\right)+C ; \quad 3. \frac{x}{2}-\frac{1}{28} \sin 14 x+C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4. \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C; & 5. x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C; \\
& 6. \frac{3}{5} (\cos x)^{5/3} + 3 (\cos x)^{-1/3} + C; & 7. -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C; & 8. \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \\
& + \frac{1}{32} \sin 4x + C; & 9. -\frac{1}{20} \cos 10x + \frac{1}{8} \cos 4x + C; & 10. \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - 3}{\sqrt{6}} + C.
\end{aligned}$$

Література:

- [3], гл.4, С. 191–196;
 [4], гл. 5, §7, С. 238–243;
 [5], гл.10, §12, С. 364–368;
 [6], гл.7, §4, С. 313–315, 316–318.

Практичне заняття 7 ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

1. Поняття ірраціональної функції.
2. Інтегрування функцій $R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$.
3. Інтегрування функцій $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$.
4. Інтегрування ірраціональних функцій виду $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$,
 $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$, $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.
5. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, де n – натуральне число.

Задачі:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}};$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - 7\sqrt[3]{x}};$

$$3. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx;$$

$$4. \int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx;$$

$$7. \int \frac{x^2}{\sqrt{(4+x^2)^5}} dx;$$

$$5. \int \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$8. \int \frac{dx}{(9+x^2)^3}.$$

Відповіді:

$$\begin{aligned} 1. & 2\sqrt{x} - 8\ln(\sqrt{x} + 4) + C; \quad 2. 3\sqrt[3]{x} + 21\ln|\sqrt[3]{x} - 7| + C; \quad 3. \frac{6}{5} \left[\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + \right. \\ & \left. + 2\ln|\sqrt[12]{x^5} - 1| \right] + C; \quad 4. -\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C, \text{ де } t = \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}; \quad 5. \frac{2}{9}\arcsin \frac{x}{3} + \\ & + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C; \quad 6. \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin t + C, \text{ де } t = \arccos \frac{5}{x}; \quad 7. \frac{x^3}{12(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} + \\ & + C; \quad 8. \frac{1}{972} \left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t \right) + C, \text{ де } t = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи:

$$1. \int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} dx;$$

$$5. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$2. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx;$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$7. \int \frac{x^2}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} dx;$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}} dx;$$

$$8. \int \frac{dx}{(x^2+25)^2}.$$

Відповіді:

$$1. x - 6\sqrt{x} + 18\ln(\sqrt{x} + 3) + C; \quad 2. 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C; \quad 3. \frac{4}{5} \cdot \sqrt[4]{x^5} - x +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4 \cdot \sqrt[4]{x} - 4 \cdot \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C; \quad \mathbf{4.} \quad \frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}(3x+4)^{2/3} + (3x+4)^{1/3} - \\
& - \ln|\sqrt[3]{3x+4} + 1| + C; \quad \mathbf{5.} \quad 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C, \text{ де } t = \arcsin \frac{x}{2}; \quad \mathbf{6.} \quad \frac{1}{6} \arccos \frac{3}{x} - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C; \\
& \mathbf{7.} \quad \ln|x + \sqrt{x^2+5}| - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + C; \quad \mathbf{8.} \quad \frac{1}{250} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C, \text{ де } t = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}.
\end{aligned}$$

Література:

[3], ГЛ. 4, С. 196–200;

[4], ГЛ. 5, §8, С. 243–246;

[5], ГЛ. 10, §10, §11, §13, С. 360–364, 369–370;

[6], ГЛ. 7, §5, С. 318–320, 321–323.

Контрольна робота (прикладі варіантів контрольних робіт)

Варіант 1

1. $\int \frac{dx}{x(2 \ln x + 5)};$

2. $\int (3x+4) \cdot \sin \frac{x}{2} dx;$

3. $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+5} dx;$

4. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx;$

5. $\int \cos^2 4x dx;$

6. $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x};$

7. $\int \frac{5x-1}{x(x+1)^2} dx.$

Варіант 2

1. $\int x \sin(3x^2-1) dx;$

2. $\int (5-2x)e^{-4x} dx;$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx;$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+7} dx;$

5. $\int \sin^2 3x dx;$

6. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x};$

7. $\int \frac{13x+6}{x^3+x} dx.$

Довідковий матеріал

1. Таблиця формул диференціювання елементарних функцій

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ де } n - \text{будь яке дійсне число};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1, x \in R;$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, x > 0;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R.$$

2. Основні правила диференціювання

$$[C]' = 0;$$

$$[Cu(x)]' = C[u(x)]';$$

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0, \text{ де } C - \text{ стала, а } u(x) \text{ та}$$

$v(x)$ такі функції, що мають похідні.

2. Таблиця інтегралів

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \text{ Частковими випадками є наступні два:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C; \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

4. Основні властивості невизначеного інтегралу

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \text{ за умови } F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x) \, dx; \quad \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)) \, dx = \int f_1(x) \, dx \pm \int f_2(x) \, dx \pm \int f_3(x) \, dx;$$

$$\int c f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx;$$

$\int f(u) \, du = F(u) + C$, C – стала, $u = u(x)$ – будь-яка функція, що має похідну за змінної x .

$$\int f(ax) \, dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \quad \int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

5. Деякі тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha; \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos \alpha; & \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha; \\
\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) &= -\cos \alpha; & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \sin \alpha; \\
\cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha; & \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \pm \sin \alpha; \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{tg} \alpha.
\end{aligned}$$

6. Квадратні рівняння

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0, \text{ або } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases} \text{ (т. Вієта).}$$

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена.

8. Формули скороченого множення

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); \\
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1972; 1977; 1985.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант., И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973.
3. Высшая математика: Программа, методические указания и контрольные задания для студентов всех специальностей заочного обучения. Ч.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной, функции многих переменных, дифференциальные уравнения и системы / Под ред. Геворкяна Ю.Л., – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002
4. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие в 2-х частях / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Ч.1.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2009.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. / Н.С. Пискунов.– М.: Наука, 1970; 1985. – Т.І.
6. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики. / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Наука, Высшая школа, 1978.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Практичне заняття 1. Табличні інтеграли. Інваріантність формул інтегрування.....	4
Практичне заняття 2. Інтегрування частинами.....	7
Практичне заняття 3. Інтеграли від деяких функцій, що містять квадратний тричлен.....	8
Практичне заняття 4. Інтегрування раціональних функцій. Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.....	10
Практичне заняття 5. Інтегрування раціональних функцій. Розклад раціональної функції на найпростіші дроби.....	12
Практичне заняття 6. Інтегрування тригонометричних функцій.....	14
Практичне заняття 7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Тригонометричні підстановки.....	16
Контрольна робота. Приклади варіантів контрольних робот.....	18
Довідковий матеріал.....	19
Список літератури.....	23

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять з вищої математики за темою
«Невизначений інтеграл»
для студентів усіх спеціальностей
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, ТОР та ТНР, КІТ

Укладач ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

Відповідальний за випуск Ю. Л. Геворкян

Роботу до видання рекомендував проф. Л. В. Курпа
В авторській редакції

План 2014 р., поз. 142

Підп. до друку 10.10.2014. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. __.
Наклад 50 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.